XXXI SEMANA NACIONAL DE INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA EN MATEMÁTICAS

Fundamentos para la Graficación 3D en computadora

Licenciatura en Matemáticas – Universidad de Sonora – Unidad Centro
Lourdes Elizabeth Luzania López - M.C. Paola Tonanzy García Mendívil - Dr. Héctor A. Hernández H.

Introducción

Desarrollar aplicaciones propias de graficación que se ajusten a los necesidades de algún propósito particular, requiere:

- Dominio de conceptos de álgebra lineal [1].
  1. Operaciones de vectores en R^3.
  2. Cálculo de intersección de un plano con una recta.
- Contar con un lenguaje que permita dibujar en el plano: puntos, segmentos de recta y que permita rellenar el interior de polígonos cerrados.

En toda superficie bien definida se pueden localizar una gran cantidad de puntos sobre ella, y establecer pequeños segmentos que la triangulen (Teselación con triángulos).
Cada triángulo consta de tres segmentos, y cada segmento se determina por dos puntos en sus extremos. Cada triángulo (en el espacio) será proyectado en un plano, y al rellenar el triangulo proyectado obtendremos la representación de una superficie 3D, la pantalla (2D).
En este trabajo presentamos principalmente como representar un punto de R^3 en R^2, los cálculos dependerán de la posición del punto, y de la localización del observador, que siempre dirige su mirada hacia el origen.
Para llevar a cabo esta tarea, matematizaremos la Técnica de Durero [2], la cual a grandes rasgos consiste en intersectar a una recta (hilo) con un plano de dibujo (puerta abatible con papel), con ello se dibujan secuencias de puntos que guían el trazo de curvas.

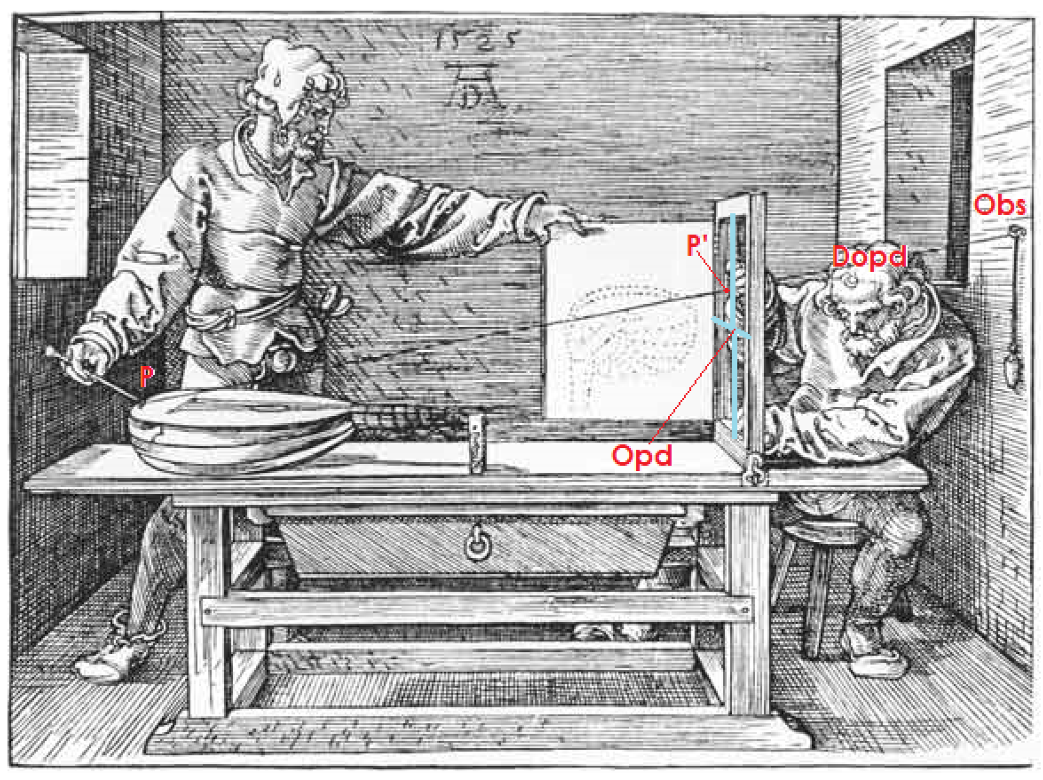


Figura: "Hombre Dibujando un Laúd", 1525, Alberto Durero (1471-1528)

Proceso

1. Definición de los elementos involucrados.
2. Obtención paramétrica del segmento que une al punto a proyectar con el ojo del observador.
3. Obtención de la representación paramétrica del plano de dibujo.
4. Cálculo del punto de intersección.
5. Coordenadas del punto de intersección respecto al plano de dibujo (proyección 2D).

Definición de los elementos involucrados

- $Obs = (Obs_1, Obs_2, Obs_3)$: Coordenadas de observador, posicionado a la altura del ojo del observador.
- $Dopd$: Distancia del observador al plano de dibujo, esta será elegida arbitrariamente.
- Opd: Origen del plano de dibujo
$$Opd = \left(\frac{||Obs|| - Dopd}{||Obs||}\right) Obs$$
- X': Es el eje de las X en el plano de dibujo, calculamos el producto cruz del vector e_3 con el Obs obedeciendo la regla de la mano derecha.
$$X' = e_3 \times Obs = (-Obs_2, Obs_1, 0)$$
- Y': Es el eje de las Y en el plano de dibujo, calculamos el producto cruz del vector Obs con el X'.
$$Y' = Obs \times X' = (-Obs_1 Obs_3, -Obs_2 Obs_3, Obs_1^2 + Obs_2^2)$$
- P: Coordenadas del punto a proyectar.
$$P = (p_1, p_2, p_3)$$
- Longitud de los ejes LX' y LY' del plano de dibujo. En analogía con el método usado por Durero, vendrían siendo el ancho y alto de la ventana donde él reproducía la pintura del objeto o modelo, y también los elegiremos a nuestra conveniencia.
$$LX' = 6 \qquad LY' = 4$$

Obtención paramétrica del segmento que une al punto P con el ojo del observador, Obs

$$\ell(t) = P + t(Obs - P)$$

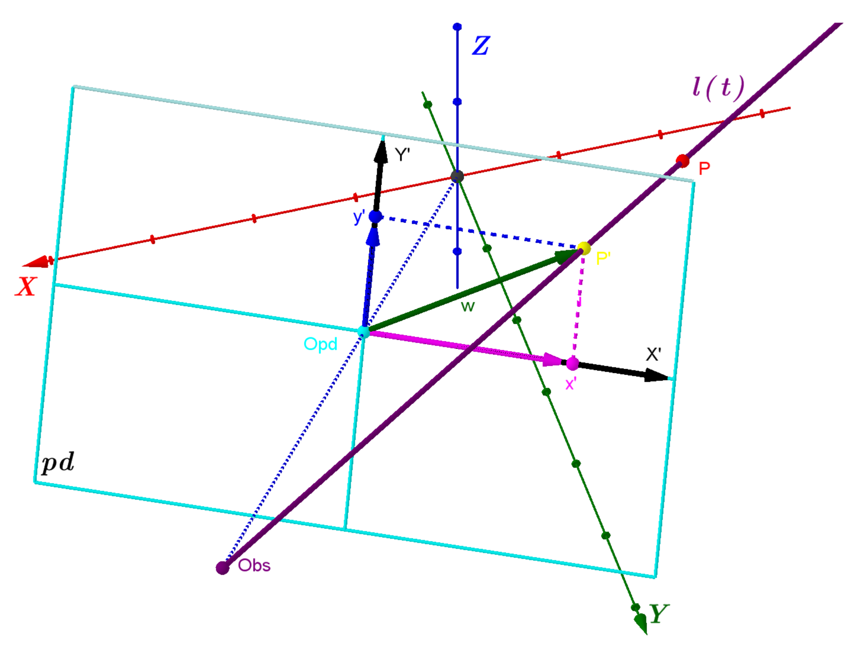
Obtención de la representación algebraica del plano de dibujo

$$pd: \quad ((x, y, z) - Opd) \cdot Obs = 0$$

Cálculo de el punto P', se obtiene intersectando $\ell(t)$ con pd

Se calcula sustituyendo el valor adecuado de t en $\ell(t)$, el valor adecuado de t, es el que hace que $\ell(t)$ pertenezca al plano, $\ell(t)$ que resuelve la ecuación:
$$(\ell(t) - Opd) \cdot Obs = 0 \qquad (1)$$
Sustituyamos el valor de $\ell(t)$ en 1
$$\begin{aligned}(P + t(Obs - P) - Opd) \cdot Obs &= 0\\ (P - Opd + t(Obs - P)) \cdot Obs &= 0\\ (P - Opd) \cdot Obs + t(Obs - P) \cdot Obs &= 0\\ t(Obs - P) \cdot Obs &= (Opd - P) \cdot Obs\\ t &= \frac{(Opd - P) \cdot Obs}{(Obs - P) \cdot Obs}\end{aligned}$$
Así el punto de intersección es:
$$P' = P + \left(\frac{(Opd - P) \cdot Obs}{(Obs - P) \cdot Obs}\right)(Obs - P)$$

Representación gráfica de los elementos involucrados

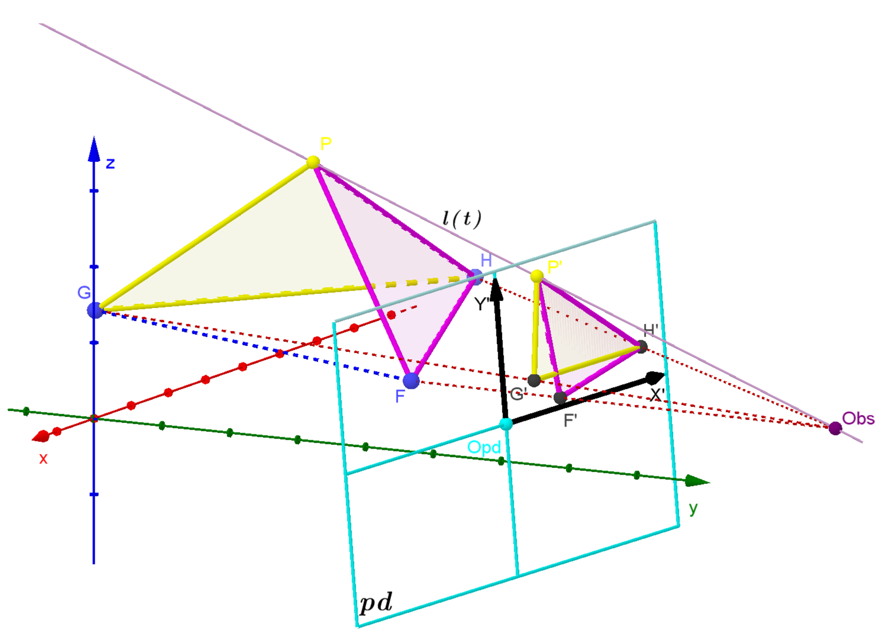


Cálculo de las coordenadas del punto P' respecto a la base $B = \{X', Y'\}$ (Proyección en 2D)

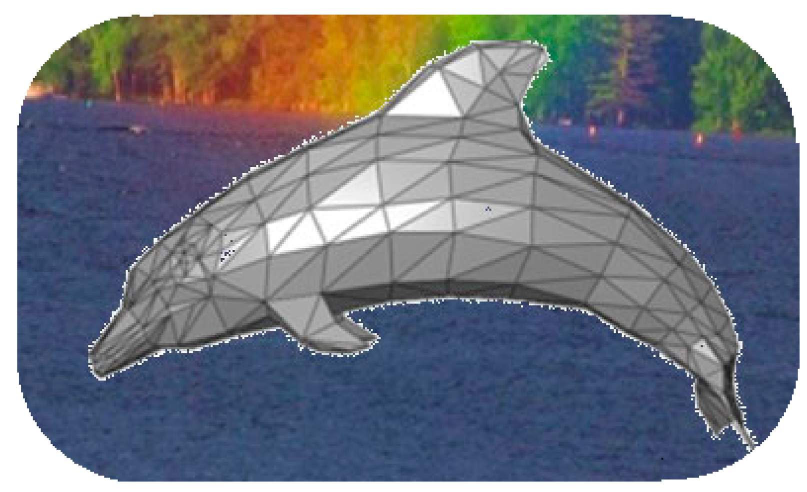
Para encontrar las coordenadas de $P' = (x', y')_B = (e, f)$ calcularemos la proyección ortogonal del vector $\vec{W}$ que inicia en el origen del plano de dibujo Opd y termina en P' sobre X' y luego sobre Y'. La expresión ya simplificada para W es:
$$W = Dopd\left(\frac{1}{||Obs||}Obs + \frac{||Obs||}{||Obs||^2 - P \cdot Obs}(P - Obs)\right)$$
$$x' = \left(\frac{W \cdot X'}{X' \cdot X'}\right) X'$$
$$y' = \left(\frac{W \cdot Y'}{Y' \cdot Y'}\right) Y'$$
Obs: Tanto x', como y' son elementos de R^3, de ellos se toma su magnitud y su orientación (respecto a X y a Y) para establecer su signo.
Así $(e, f) = (\ ||x'||signo(x' \cdot X'),\ ||y'||signo(y' \cdot Y')\ )$.

Triangulación de una imagen

En la siguiente imagen se muestra un tetraedro y su proyección en el plano de dibujo pd.
Como podemos ver son cuatro puntos en R^3 que proyectan cuatro puntos en R^2, se trazan los segmentos que los unen y se rellenan los triángulos formados.
Te invitamos a que manipules la siguiente construcción para que tengas una mejor visualización de los elementos que aparecen en la figura, tales como la distancia del origen del plano de dibujo $Dopd$, el observador Obs o algún punto del tetraedro P, F, G, o H, y notes como los cambios siguen dentro del pd. Haz clik en la siguiente imagen para acceder a la construcción de la figura y puedas hacer los cambios que creas convenientes.(Es necesario esperar algunos segundos a que se cargue la aplicación Geogebra).
Para mover algún punto sólo posiciónate sobre él y da un click para poder realizar movimientos horizontales y otro clik para movimientos verticales.



Este podría ser un producto final trazado en el plano de dibujo, puede mejorar si los triángulos se dibujan del color gris adecuado. El dibujo puede ser más fino si se aumenta la cantidad de triángulos.



Referencias

- Howard Anton, Hugo Villagómez Velázquez y col. *Introducción al Álgebra Lineal*. 2003.
- Maria Portmann. "Aportaciones iconográficas y estéticas de Alberto Durero en el"Libro segundo"de Juan de Arfe y Villafañe". En: (2015).